IV. ИНТЕГРАЛЫ

Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.
6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.
7 Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
10. Основные свойства определенного интеграла.
11. Теорема о среднем.
12. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.
13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
15. Вычисление площадей плоских фигур.
16. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

Теоретические упражнения

1. Считая, что функция $\dfrac{\sin x}{x}$ равна 1 при $x = 0$, доказать, что она интегрируема на отрезке $[0,\ 1]$.

2. Какой из. интегралов больше:

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \text{ или } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx ?$$

3. Пусть $f(t)$ – непрерывная функция, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемые. Доказать, что

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f\left[\psi(x)\right]\psi'(x) - f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x).$$

4. Найти $\dfrac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\,dt.$

5. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)\mathrm{e}^{-t^2}\,dt.$$

6. Пусть $f(x)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T. Доказать, что

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \quad \forall a.$$

7. Доказать, что если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^{+a} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

8. Доказать, что для нечетной функции $f(x)$ справедливы равенства

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^{+a} f(x)\,dx \text{ и } \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Чему равен интеграл $\int_{-1}^{+1} \sin^2 x \ln\dfrac{2+x}{2-x}\,dx$?

9. При каком условии, связывающем коэффициенты a, b, c интеграл $\int \dfrac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ является рациональной функцией?

10. При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^4}\,dx$ выражается элементарными функциями.

Расчетные задания

Задача 1. Вычислить неопределенные интегралы.

1.1. $\int (4-3x)e^{-3x}dx.$

1.2. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx.$

1.3. $\int (3x+4)e^{3x}dx.$

1.4. $\int (4x-2)\cos 2xdx.$

1.5. $\int (4-16x)\sin 4xdx.$

1.6. $\int (5x-2)e^{3x}dx.$

1.7. $\int (1-6x)e^{2x}dx.$

1.8. $\int \ln\left(x^2+4\right)dx.$

1.9. $\int \ln\left(4x^2+1\right)dx.$

1.10. $\int (2-4x)\sin 2xdx.$

1.11. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}dx.$

1.12. $\int e^{-2x}(4x-3)dx.$

1.13. $\int e^{-3x}(2-9x)dx.$

1.14. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx.$

1.15. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}dx.$

1.16. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx.$

1.17. $\int (5x+6)\cos 2xdx.$

1.18. $\int (3x-2)\cos 5xdx.$

1.19. $\int \left(x\sqrt{2}-3\right)\cos 2xdx.$

1.20. $\int (4x+7)\cos 3xdx.$

1.21. $\int (2x-5)\cos 4xdx.$

1.22. $\int (8-3x)\cos 5xdx.$

1.23. $\int (x+5)\sin 3xdx.$

1.24. $\int (2-3x)\sin 2xdx.$

1.25. $\int (4x+3)\sin 5xdx.$

1.26. $\int (7x-10)\sin 4xdx.$

1.27. $\int \left(\sqrt{2}-8x\right)\sin 3xdx.$

1.28. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

1.29. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$

1.30. $\int x\sin^2 xdx.$

1.31. $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$.

Задача 2. Вычислить определенные интегралы.

2.1. $\int_{-2}^{0} (x^2+5x+6)\cos 2x dx.$

2.2. $\int_{-2}^{0} \left(x^2-4\right)\cos 3x dx.$

2.3. $\int_{-1}^{0} \left(x^2+4x+3\right)\cos x dx.$

2.4. $\int_{-2}^{0} (x+2)^2 \cos 3x dx.$

2.5. $\int_{-4}^{0} \left(x^2+7x+12\right)\cos x dx.$

2.6. $\int_{0}^{\pi} \left(2x^2+4x+7\right)\cos 2x dx.$

2.7. $\int_{0}^{\pi} \left(9x^2+9x+11\right)\cos 3x dx.$

2.8. $\int_{0}^{\pi} \left(8x^2+16x+17\right)\cos 4x dx.$

2.9. $\int_{0}^{2\pi} \left(3x^2+5\right)\cos 2x dx.$

2.10. $\int_{0}^{2\pi} \left(2x^2-15\right)\cos 3x dx.$

2.11. $\int_{0}^{2\pi} \left(3-7x^2\right)\cos 2x dx.$

2.12. $\int_{0}^{2\pi} \left(1-8x^2\right)\cos 4x dx.$

2.13. $\int_{-1}^{0} \left(x^2+2x+1\right)\sin 3x dx.$

2.14. $\int_{0}^{3} \left(x^2-3x\right)\sin 2x dx.$

2.15. $\int_{0}^{\pi} \left(x^2-3x+2\right)\sin x dx.$

2.16. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2-5x+6\right)\sin 3x dx.$

2.17. $\int_{-3}^{0} \left(x^2+6x+9\right)\sin 2x dx.$

2.18. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(x^2+17,5\right)\sin 2x dx.$

2.19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-5x^2\right)\sin x dx.$

2.20. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{3} \left(3x-x^2\right)\sin 2x dx.$

2.21. $\int_1^2 x\ln^2 x dx.$

2.22. $\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$

2.23. $\int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

2.24. $\int_0^1 (x+1)\ln^2(x+1)dx.$

2.25. $\int_2^3 (x-1)^3 \ln^2(x-1)dx.$

2.26. $\int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2(x+2)dx.$

2.27. $\int_0^2 (x+1)^2 \ln^2(x+1)dx.$

2.28. $\int_1^e \sqrt{x}\ln^2 x dx.$

2.29. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$

2.30. $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$

2.31. $\int_{-2}^0 (x^2+2)e^{\frac{x}{2}} dx.$

Задача 3. Найти неопределенные интегралы.

3.1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

3.2. $\int \frac{1+\ln x}{x} dx.$

3.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

3.4. $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x} dx.$

3.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

3.6. $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

3.7. $\int \operatorname{tg} x \ln\cos x dx.$

3.8. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$

3.9. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$

3.10. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^3} dx.$

3.11. $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$

3.12. $\int \frac{x\cos x + \sin x}{(x\sin x)^2} dx.$

3.13. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx.$

3.14. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$

3.15. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$

3.16. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx.$

3.17. $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{(x^3+3x+1)^5}.$

3.18. $\int \frac{4\operatorname{arctg} x-x}{1+x^2}dx.$

3.19. $\int \frac{x^3}{x^2+4}dx.$

3.20. $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx.$

3.21. $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx.$

3.22. $\int \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx.$

3.23. $\int \frac{1/\left(2\sqrt{x}\right)+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx.$

3.24. $\int \frac{x}{x^4+1}dx.$

3.25. $\int \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

3.26. $\int \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

3.27. $\int \frac{\operatorname{arctg} x+x}{1+x^2}dx.$

3.28. $\int \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx.$

3.29. $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx.$

3.30. $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

3.31. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$

Задача 4. Вычислить определенные интегралы.

4.1. $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx.$

4.2. $\int_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^2}.$

4.3. $\int_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x-x}{1+x^2}dx.$

4.4. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{x^2+4}.$

4.5. $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx.$

4.6. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx.$

4.7. $\int_{0}^{1/2} \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx.$

4.8. $\int_{1}^{4} \frac{1/\left(2\sqrt{x}\right)+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx.$

4.9. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{x^4+1}.$

4.10. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

4.11. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

4.12. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x+x}{1+x^2}dx.$

4.13. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx.$

4.14. $\int_{0}^{1} \frac{x^3}{x^2+1}dx.$

4.15. $\int_{0}^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

4.16. $\int_{1}^{3} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$

4.17. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

4.18. $\int_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}dx.$

4.19. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

4.20. $\int_{1}^{e} \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx.$

4.21. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

4.22. $\int_{0}^{1} \frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$

4.23. $\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\ln\cos xdx.$

4.24. $\int_{-1}^{0} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx.$

4.25. $\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

4.26. $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx.$

4.27. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}dx.$

4.28. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx.$

4.29. $\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx.$

4.30. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$

4.31. $\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$

Задача 5. Найти неопределенные интегралы.

5.1. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx.$

5.2. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx.$

5.3. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx.$

5.4. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx.$

5.5. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx.$

5.6. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx.$

5.7. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$

5.8. $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx.$

5.9. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx.$

5.10. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx.$

5.11. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}dx.$

5.12. $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx.$

5.13. $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx.$

5.14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}dx.$

5.15. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx.$

5.16. $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx.$

5.17. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx.$

5.18. $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx.$

5.19. $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}dx.$

5.20. $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx.$

5.21. $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx.$

5.22. $\int \frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x}dx.$

5.23. $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)}dx.$

5.24. $\int \frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}dx.$

5.25. $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)}dx.$

5.26. $\int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x-4)(x+5)}dx.$

5.27. $\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx.$

5.28. $\int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx.$

5.29. $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$

5.30. $\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx.$

5.31. $\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx.$

Задача 6. Найти неопределенные интегралы.

6.1. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$

6.2. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx.$

6.3. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$

6.4. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx.$

6.5. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx.$

6.6. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx.$

6.7. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx.$

6.8. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx.$

6.9. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx.$

6.10. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3} dx.$

6.11. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} dx.$

6.12. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} dx.$

6.13. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} dx.$

6.14. $\int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3} dx.$

6.15. $\int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx.$

6.16. $\int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx.$

6.17. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} dx.$

6.18. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx.$

6.19. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} dx.$

6.20. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3} dx.$

6.21. $\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx.$

6.22. $\int \frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3}dx.$

6.23. $\int \frac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)(x+2)^3}dx.$

6.24. $\int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}dx.$

6.25. $\int \frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)(x-2)^3}dx.$

6.26. $\int \frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}dx.$

6.27. $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}dx.$

6.28. $\int \frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}dx.$

6.29. $\int \frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}dx.$

6.30. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx.$

6.31. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx.$

Задача 7. Найти неопределенные интегралы.

7.1. $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx.$

7.2. $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx.$

7.3. $\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}dx.$

7.4. $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

7.5. $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

7.6. $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx.$

7.7. $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx.$

7.8. $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}dx.$

7.9. $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx.$

7.10. $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx.$

7.11. $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx.$

7.12. $\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}dx.$

7.13. $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx.$

7.14. $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx.$

7.15. $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx.$

7.16. $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$

7.17. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$

7.18. $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$

7.19. $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx.$

7.20. $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx.$

7.21. $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx.$

7.22. $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}dx.$

7.23. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx.$

7.24. $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx.$

7.25. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx.$

7.26. $\int \frac{2x^3+2x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx.$

7.28. $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$

7.29. $\int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)}dx.$

7.30. $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$

7.30. $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)}dx.$

7.31. $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$

Задача 8. Вычислить определенные интегралы.

8.1. $\int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

8.2. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$.

8.3. $\int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$.

8.4. $\int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$.

8.5. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2} dx$.

8.6. $\int_{2\operatorname{arctg}2}^{2\operatorname{arctg}3} \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$.

8.7. $\int_{2\operatorname{arctg}(1/3)}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$.

8.8. $\int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$.

8.9. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$.

8.10. $\int_{0}^{2\pi/3} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x} dx$.

8.11. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x-\cos x}$.

8.12. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{(1+\cos x)dx}{1+\sin x+\cos x}$.

8.13. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin dx}{1+\sin x+\cos x}$.

8.14. $\int_{0}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2} dx$.

8.15. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x+\cos x}$.

8.16. $\int_{0}^{2\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)(1+\cos x)}$.

8.17. $\int_{-2\pi/3}^{0} \frac{\cos x dx}{1+\cos x-\sin x}$.

8.18. $\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

8.19. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

8.20. $\int_{0}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1-\sin x)dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

8.21. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}$.

8.22. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

8.23. $\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

8.24. $\int_{-2\pi/3}^{0} \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

8.25. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

8.26. $\int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

8.27. $\int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$.

8.28. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

8.29. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2+\sin x}$.

8.30. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

8.31. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5+3\sin x}$.

Задача 9. Вычислить определенные интегралы.

9.1. $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x+5)\sin 2x}$.

9.2. $\int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2\operatorname{ctg} x+1}{(2\sin x+\cos x)^2} dx$.

9.3. $\int_0^{\arccos(4/\sqrt{17})} \frac{3+2\operatorname{tg} x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1} dx$.

9.4. $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4\operatorname{tg} x-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x} dx$.

9.5. $\int_0^{\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{(8+\operatorname{tg} x)}{18\sin^2 x+2\cos^2 x} dx$.

9.6. $\int_0^{\arccos\sqrt{2/3}} \frac{\operatorname{tg} x+2}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3} dx$.

9.7. $\int_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4} \frac{6\operatorname{tg} x dx}{3\sin 2x+5\cos^2 x}$.

9.8. $\int_0^{\pi/4} \frac{2\operatorname{tg}^2 x-11\operatorname{tg} x-22}{4-\operatorname{tg} x} dx$.

9.9. $\int_{-\operatorname{arctg}(1/3)}^{0} \frac{3\operatorname{tg} x+1}{2\sin 2x-5\cos 2x+1} dx$.

9.10. $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1+\operatorname{ctg} x}{(\sin x+2\cos x)^2} dx$.

9.11. $\int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4} dx$.

9.12. $\int_0^{\pi/4} \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4} dx$.

9.13. $\int_0^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4+\operatorname{tg} x}{2\sin^2 x+18\cos^2 x} dx$.

9.14. $\int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{12+\operatorname{tg} x}{3\sin^2 x+12\cos^2 x} dx$.

9.15. $\int_0^{\operatorname{arctg}(2/3)} \frac{6+\operatorname{tg}x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}dx.$

9.16. $\int_0^{\arcsin\sqrt{3/7}} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x-7}.$

9.17. $\int_0^{\pi/4} \frac{7+3\operatorname{tg}x}{(\sin x+2\cos x)^2}dx.$

9.18. $\int_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2\operatorname{tg}x+5}{(5-\operatorname{tg}x)\sin 2x}dx.$

9.19. $\int_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^{0} \frac{3\operatorname{tg}^2 x-50}{2\operatorname{tg}x+7}dx.$

9.20. $\int_0^{\pi/4} \frac{5\operatorname{tg}x+2}{2\sin 2x+5}dx.$

9.21. $\int_{\pi/4}^{\arcsin(2/\sqrt{5})} \frac{4\operatorname{tg}x-5}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}dx.$

9.22. $\int_0^{\arcsin\sqrt{7/8}} \frac{6\sin^2 x}{4+3\cos 2x}dx.$

9.23. $\int_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^{0} \frac{11-3\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+3}dx.$

9.24. $\int_0^{\arcsin 3\sqrt{10}} \frac{2\operatorname{tg}x-5}{(4\cos x-\sin x)^2}dx.$

9.25. $\int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{dx}{(6-\operatorname{tg}x)\sin 2x}.$

9.26. $\int_0^{\pi/4} \frac{4-7\operatorname{tg}x}{2+3\operatorname{tg}x}dx.$

9.27. $\int_{-\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{2-\operatorname{tg}x}{(\sin x+3\cos x)^2}dx.$

9.28. $\int_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{2/3}} \frac{8\operatorname{tg}x dx}{3\cos^2 x+8\sin 2x-7}.$

9.29. $\int_{\arccos(1/\sqrt{10})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12dx}{(6+5\operatorname{tg}x)\sin 2x}.$

9.30. $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4+3\cos 2x}dx.$

9.31. $\int_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+5}.$

Задача 10. Вычислить определенные интегралы.

10.1. $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x\, dx.$

10.2. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x\cos^2 x\, dx.$

10.3. $\int_0^{2\pi} \sin^4 x\cos^4 x\, dx.$

10.4. $\int_0^{2\pi} \sin^2(x/4)\cos^6(x/4)\, dx.$

10.5. $\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8(x/2)\, dx.$

10.6. $\int_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^8 x\, dx.$

10.7. $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x\, dx.$

10.8. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x\, dx.$

10.9. $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x\, dx.$

10.10. $\int_0^{2\pi} \cos^8(x/4)\, dx.$

10.11. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^8(x/2)\, dx.$

10.12. $\int_{-\pi}^{0} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x\, dx.$

10.13. $\int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x\, dx.$

10.14. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x\, dx.$

10.15. $\int_0^{2\pi} \cos^8 x\, dx.$

10.16. $\int_0^{2\pi} \sin^8(x/4)\, dx.$

10.17. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^6(x/2)\cos^2(x/2)\, dx.$

10.18. $\int_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x\, dx.$

10.19. $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x\, dx.$

10.20. $\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x\, dx.$

10.21. $\int_0^{2\pi} \sin^8 x\, dx.$

10.22. $\int_0^{2\pi} \sin^6(x/4)\cos^2(x/4)\, dx.$

10.23. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4(x/2)\cos^4(x/2)\, dx.$

10.24. $\int_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x\, dx.$

10.25. $\int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \cos^8 x\, dx.$

10.26. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x\, dx.$

10.27. $\int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x\, dx.$

10.28. $\int_0^{2\pi} \sin^4(x/4)\cos^4(x/4)\, dx.$

10.29. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2(x/2)\cos^6(x/2)\, dx.$

10.30. $\int_{-\pi/2}^{0} 2^8 \cos^8 x\, dx.$

10.31. $\int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x \, dx.$

Задача 11. Вычислить определенные интегралы.

11.1. $\int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{3x+1}}{\left(\sqrt{3x+1}+4\sqrt{1-x}\right)(3x+1)^2}dx.$

11.2. $\int_1^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}dx.$

11.3. $\int_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}dx.$

11.4. $\int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}dx.$

11.5. $\int_0^5 e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$

11.6. $\int_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}dx.$

11.7. $\int_0^1 e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$

11.8. $\int_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)(x-2)^2}dx.$

11.9. $\int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2\sqrt{x}}dx.$

11.10. $\int_1^2 \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}dx.$

11.11. $\int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}dx.$

11.12. $\int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{2x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(2x+2)^2}.$

11.13. $\int_{-1/2}^0 \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}.$

11.14. $\int_0^4 e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}.$

11.15. $\int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}dx.$

11.16. $\int_{-5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}dx.$

11.17. $\int_2^3 \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}dx.$

11.18. $\int_0^7 \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}dx.$

11.19. $\int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(3x+2)^2}.$

11.20. $\int_0^2 e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}.$

11.21. $\int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx.$

11.22. $\int_{1/24}^{1/3} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}dx.$

11.23. $\int_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}}dx.$

11.24. $\int_0^1 \frac{\left(4\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{2x+1}+4\sqrt{1-x}\right)(2x+1)^2}.$

11.25. $\int_1^{64} \frac{\left(2+\sqrt[3]{x}\right)dx}{\left(\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x^3}+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}.$

11.26. $\int_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}dx.$

11.27. $\int_0^6 \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}}dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}.$

11.28. $\int_1^{64} \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}dx.$

11.29. $\int_0^1 \frac{\left(4\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}\right)dx}{\left(\sqrt{x+1}+4\sqrt{1-x}\right)(x+1)^2}.$

11.30. $\int_0^3 \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}}dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}.$

11.31. $\int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(x+2)^2}.$

Задача 12. Вычислить определенные интегралы.

12.1. $\int_0^{16} \sqrt{256-x^2}dx.$

12.2. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

12.3. $\int_0^5 \frac{dx}{\left(25+x^2\right)\sqrt{25+x^2}}.$

12.4. $\int_0^3 \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}.$

12.5. $\int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}.$

12.6. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx.$

12.7. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$

12.8. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}.$

12.9. $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\left(2-x^2\right)^{3/2}}$.

12.10. $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

12.11. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

12.12. $\int_0^4 \frac{dx}{\left(16+x^2\right)^{3/2}}$.

12.13. $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$.

12.14. $\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

12.15. $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$.

12.16. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$.

12.17. $\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(64-x^2\right)^3}}$.

12.18. $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$.

12.19. $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$.

12.20. $\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

12.21. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

12.22. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$.

12.23. $\int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(8-x^2\right)^3}}$.

12.24. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$.

12.25. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

12.26. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

12.27. $\int_0^2 \frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{4+x^2}}$.

12.28. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$.

12.29. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$.

12.30. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

12.31. $\int_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Задача 13. Найти неопределенные интегралы.

13.1. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}} dx.$

13.2. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$

13.3. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$

13.4. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}} dx.$

13.5. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[9]{x^8}} dx.$

13.6. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}{x\sqrt[9]{x^5}} dx.$

13.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2}}{x^2\sqrt[9]{x}} dx.$

13.8. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}{x\sqrt[6]{x^5}} dx.$

13.9. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$

13.10. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}} dx.$

13.11. $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}}{x\sqrt[8]{x^7}} dx.$

13.12. $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}}{x\sqrt[12]{x^7}} dx.$

13.13. $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^3}}{x^2\sqrt[6]{x}} dx.$

13.14. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}} dx.$

13.15. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$

13.16. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^2}}{x^2\sqrt[4]{x}} dx.$

13.17. $\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}}{x\sqrt[10]{x^9}} dx.$

13.18. $\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4}}{x\sqrt[5]{x^3}} dx.$

13.19. $\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^4}}{x^2\sqrt[5]{x}}dx.$

13.20. $\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^4}}{x^2\sqrt[20]{x^7}}dx.$

13.21. $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[25]{x^{11}}}dx.$

13.22. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[5]{x}}dx.$

13.23. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[15]{x}}dx.$

13.24. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^2}}{x^2\sqrt[3]{x}}dx.$

13.25. $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^3}}{x^2\sqrt[5]{x^2}}dx.$

13.26. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}dx.$

13.27. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}}{x\sqrt[12]{x^5}}dx.$

13.28. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[12]{x^5}}dx.$

13.29. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx.$

13.30. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\sqrt[15]{x^4}}dx.$

13.31. $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}dx.$

Задача 14. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

14.1. $y=(x-2)^3,$
$y=4x-8.$

14.2. $y=x\sqrt{9-x^2}, \quad y=0,$
$(0\le x\le 3).$

14.3. $y=4-x^2,$
$y=x^2-2x.$

14.4. $y=\sin x\cos^2 x, \quad y=0,$
$(0\le x\le \pi/2).$

14.5. $y=\sqrt{4-x^2}, \quad y=0,$
$x=0, \quad x=1.$

14.6. $y=x^2\sqrt{4-x^2}, \quad y=0,$
$(0\le x\le 2).$

14.7. $y=\cos x\sin^2 x,\quad y=0,$
$(0\le x\le \pi/2).$

14.8. $y=\sqrt{e^x-1},\quad y=0,$
$x=\ln 2.$

14.9. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},\quad y=0,$
$x=1,\quad x=e^3.$

14.10. $y=\arccos x,\quad y=0,$
$x=0.$

14.11. $y=(x+1)^2,$
$y^2=x+1.$

14.12. $y=2x-x^2+3,$
$y=x^2-4x+3.$

14.13. $y=x\sqrt{36-x^2},\quad y=0,$
$(0\le x\le 6).$

14.14. $x=\arccos y,\quad x=0,$
$y=0.$

14.15. $y=\operatorname{arctg} x,\quad y=0,$
$x=\sqrt{3}.$

14.16. $y=x^2\sqrt{8-x^2},\quad y=0,$
$(0\le x\le 2\sqrt{2}).$

14.17. $x=\sqrt{e^y-1},\quad x=0,$
$y=\ln 2.$

14.18. $y=x\sqrt{4-x^2},\quad y=0,$
$(0\le x\le 2).$

14.19. $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}},\quad y=0,$
$x=1.$

14.20. $y=\dfrac{1}{1+\cos x},\quad y=0,$
$x=\pi/2,\quad x=-\pi/2.$

14.21. $x=(y-2)^3,$
$x=4y-8.$

14.22. $y=\cos^5 x\sin 2x,\quad y=0,$
$(0\le x\le \pi/2).$

14.23. $y=\dfrac{x}{(x^2+1)^2},\quad y=0,$
$x=1.$

14.24. $x=4-y^2,$
$x=y^2-2y.$

14.25. $x=\dfrac{1}{y\sqrt{1+\ln y}},\quad x=0,$
$y=1,\quad y=e^3.$

14.26. $y=\dfrac{e^{1/x}}{x^2},\quad y=0,$
$x=2,\quad x=1.$

14.27. $y=x^2\sqrt{16-x^2},\quad y=0,$
$(0\le x\le 4).$

14.28. $x=\sqrt{4-y^2},\quad x=0,$
$y=0,\quad y=1.$

14.29. $y=(x-1)^2,$
$y^2=x-1.$

14.30. $y=x^2\cos x, \quad y=0,$
$(0\le x\le \pi/2).$

14.31. $x=4-(y-1)^2,$
$x=y^2-4y+3.$

Задача 15. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

15.1. $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x=2 \quad (x\ge 2).$

15.2. $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y=2 \quad (y\ge 2).$

15.3. $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$
$y=4 \quad (0<x<8\pi, \ y\ge 4).$

15.4. $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$
$x=2 \quad (x\ge 2).$

15.5. $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$
$y=3 \quad (y\ge 3).$

15.6. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$
$y=3 \quad (0<x<4\pi, \ y\ge 3).$

15.7. $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$
$x=6\sqrt{3} \quad (x\ge 6\sqrt{3}).$

15.8. $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases}$
$y=\sqrt{3} \quad (y\ge \sqrt{3}).$

15.9. $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$
$y=3 \quad (0<x<6\pi, \ y\ge 3).$

15.10. $\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x=4 \quad (x\ge 4).$

15.11. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 3 \quad (y \geq 3).$

15.12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, \ y \geq 9).$

15.13. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4 \quad (x \geq 4).$

15.14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$
$y = 4 \quad (y \geq 4).$

15.15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, \ y \geq 6).$

15.16. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}).$

15.17. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2\sqrt{3} \quad (x \geq 2\sqrt{3}).$

15.18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, \ y \geq 15).$

15.19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1 \quad (x \geq 1).$

15.20. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 4 \quad (y \geq 4).$

15.21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$
$y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, \ y \geq 1).$

15.22. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1 \quad (x \geq 1).$

15.23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2 \quad (y \geq 2).$

15.24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, \ y \geq 12).$

15.25. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}).$

15.26. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$
$y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}).$

15.27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, \ y \geq 2).$

15.28. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2 \quad (x \geq 2).$

15.29. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 5 \quad (y \geq 5).$

15.30. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, \ y \geq 6).$

15.31. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}).$

Задача 16. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах.

16.1. $r = 4\cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$

16.2. $r = \cos 2\varphi.$

16.3. $r = \sqrt{3}\cos\varphi, \quad r = \sin\varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$

16.4. $r = 4\sin 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$

16.5. $r = 2\cos\varphi, \quad r = 2\sqrt{3}\sin\varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$

16.6. $r = \sin 3\varphi.$

16.7. $r = 6\sin 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$

16.8. $r = \cos 3\varphi.$

16.9. $r = \cos\varphi, \quad r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4), \quad (-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2).$

16.10. $r = \sin\varphi, \quad r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4), \quad (0 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$

16.11. $r = 6\cos 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$

16.12. $r = 1/2 + \sin\varphi.$

16.13. $r=\cos\varphi,\quad r=\sin\varphi,$ $(0\le\varphi\le\pi/2).$

16.14. $r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4),$ $r=\sqrt{2}\sin(\varphi-\pi/4),$ $(\pi/4\le\varphi\le 3\pi/4).$

16.15. $r=\cos\varphi,\quad r=2\cos\varphi.$

16.16. $r=\sin\varphi,\quad r=2\sin\varphi.$

16.17. $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi.$

16.18. $r=1/2+\cos\varphi.$

16.19. $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi.$

16.20. $r=(5/2)\sin\varphi,\quad r=(3/2)\sin\varphi.$

16.21. $r=(3/2)\cos\varphi,\quad r=(5/2)\cos\varphi.$

16.22. $r=4\cos 4\varphi.$

16.23. $r=\sin 6\varphi.$

16.24. $r=2\cos\varphi,\quad r=3\cos\varphi.$

16.25. $r=\cos\varphi+\sin\varphi.$

16.26. $r=2\sin 4\varphi.$

16.27. $r=2\cos 6\varphi.$

16.28. $r=\cos\varphi-\sin\varphi.$

16.29. $r=3\sin\varphi,\quad r=5\sin\varphi.$

16.30. $r=2\sin\varphi,\quad r=4\sin\varphi.$

16.31. $r=6\sin\varphi,\quad r=4\sin\varphi.$

Задача 17. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

17.1. $y=\ln x,\quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}.$

17.2. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2},\quad 1\le x\le 2.$

17.3. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\quad 0\le x\le 7/9.$

17.3. $y=\ln\dfrac{5}{2x},\quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$

17.5. $y=-\ln\cos x,\quad 0\le x\le\pi/6.$

17.6. $y=e^x+6,\quad \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}.$

17.7. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},\quad 1/4\le x\le 1.$

17.8. $y=\ln(x^2-1),\quad 2\le x\le 3.$

17.9. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,\quad 0\le x\le 8/9.$

17.10. $y=\ln(1-x^2),\quad 0\le x\le 1/4.$

17.11. $y = 2 + \operatorname{ch} x, \quad 0 \le x \le 1.$

17.12. $y = 1 - \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \pi/6.$

17.13. $y = e^x + 13, \quad \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

17.14. $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad 0 \le x \le 1/4.$

17.15. $y = 2 - e^x, \quad \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}.$

17.16. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le 15/16.$

17.17. $y = 1 - \ln\sin x, \quad \pi/3 \le x \le \pi/2.$

17.18. $y = 1 - \ln\left(x^2 - 1\right), \quad 3 \le x \le 4.$

17.19. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5, \quad 1/9 \le x \le 1.$

17.20. $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1, \quad 0 \le x \le 9/16.$

17.21. $y = \ln\sin x, \quad \pi/3 \le x \le \pi/2.$

17.22. $y = \ln 7 - \ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

17.23. $y = \operatorname{ch} x + 3, \quad 0 \le x \le 1.$

17.24. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le 3/4.$

17.25. $y = \ln\cos x + 2, \quad 0 \le x \le \pi/6.$

17.26. $y = e^x + 26, \quad \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

17.27. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, \quad 0 \le x \le 2.$

17.28. $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4, \quad 0 \le x \le 1/2.$

17.29. $y = \dfrac{e^x + e^{-x} + 3}{4}, \quad 0 \le x \le 2.$

17.30. $y = e^x + e, \quad \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

17.31. $y = \dfrac{1 - e^x - e^{-x}}{2}, \quad 0 \le x \le 3.$

Задача 18. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

18.1. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

18.2. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

18.3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

18.4. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi.$

18.5. $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2.$

18.6. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi.$

18.7. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$
$\pi \le t \le 2\pi.$

18.8. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

18.9. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/3.$

18.10. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/3.$

18.11. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/3.$

18.12. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le \pi.$

18.13. $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le \pi.$

18.14. $\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2.$

18.15. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi.$

18.16. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2.$

18.17. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/6.$

18.18. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

18.19. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

18.20. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3.$

18.21. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4.$

18.22. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

18.23. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4.$

18.24. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi/2.$

18.25. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

18.26. $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

18.27. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

18.28. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi.$

18.29. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4.$

18.30. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4.$

18.31. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

Задача 19. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

19.1. $\rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

19.2. $\rho = 4e^{4\varphi/3}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

19.3. $\rho = \sqrt{2}\,e^{\varphi}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

19.4. $\rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

19.5. $\rho = 6e^{12\varphi/5}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

19.6. $\rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

19.7. $\rho = 4e^{4\varphi/3}, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

19.8. $\rho = \sqrt{2}\,e^{\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

19.9. $\rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

19.10. $\rho = 12e^{12\varphi/5}, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

19.11. $\rho = 1 - \sin\varphi, \quad -\pi/2 \le \varphi \le -\pi/6.$

19.12. $\rho = 2(1 - \cos\varphi), \quad -\pi \le \varphi \le -\pi/2.$

19.13. $\rho = 3(1 + \sin\varphi), \quad -\pi/6 \le \varphi \le 0.$

19.14. $\rho = 4(1 - \sin\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \pi/6.$

19.15. $\rho = 5(1 - \cos\varphi), \quad -\pi/3 \le \varphi \le 0.$

19.16. $\rho = 6(1 + \sin\varphi), \quad -\pi/2 \le \varphi \le 0.$

19.17. $\rho = 7(1 - \sin\varphi), \quad -\pi/6 \le \varphi \le \pi/6.$

19.18. $\rho = 8(1 - \cos\varphi), \quad -2\pi/3 \le \varphi \le 0.$

19.19. $\rho = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 3/4.$

19.20. $\rho = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 4/3.$

19.21. $\rho = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 5/12.$

19.22. $\rho = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 12/5.$

19.23. $\rho = 4\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 3/4.$

19.24. $\rho = 3\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 4/3.$

19.25. $\rho = 5\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 12/5.$

19.26. $\rho = 2\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/6.$

19.27. $\rho = 8\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/4.$

19.28. $\rho = 6\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

19.29. $\rho = 2\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/6.$

19.30. $\rho = 8\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/4.$

19.31. $\rho = 6\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

Задача 20. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

20.1. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \ge 0).$

20.2. $z = x^2 + 4y^2, \quad z = 2.$

20.3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$

20.4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$

20.5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z = 1, \quad z = 0.$

20.6. $x^2 + y^2 = 9, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \ge 0).$

20.7. $z = x^2 + 9y^2,\ z = 3.$

20.8. $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 3.$

20.9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1,\ z = 16.$

20.10. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1,\ z = 2,\ z = 0.$

20.11. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1,\ z = y\sqrt{3},\ z = 0\ \ (y \geq 0).$

20.12. $z = 2x^2 + 8y^2,\ z = 4.$

20.13. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 2.$

20.14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1,\ z = 12.$

20.15. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1,\ z = 3,\ z = 0.$

20.16. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1,\ z = y\sqrt{3},\ z = 0\ \ (y \geq 0).$

20.17. $z = x^2 + 5y^2,\ z = 5.$

20.18. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 4.$

20.19. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1,\ z = 20.$

20.20. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1,\ z = 4,\ z = 0.$

20.21. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1,\ z = \frac{y}{\sqrt{3}},\ z = 0\ \ (y \geq 0).$

20.22. $z = 4x^2 + 9y^2,\ z = 6.$

20.23. $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 3.$

20.24. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1,\ z = 20.$

20.25. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1,\ z = 5,\ z = 0.$

20.26. $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1,\ z = \frac{y}{\sqrt{3}},\ z = 0\ \ (y \geq 0).$

20.27. $z = 2x^2 + 18y^2,\ z = 6.$

20.28. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 2.$

20.29. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1,\ z = 16.$

20.30. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1,\ z = 6,\ z = 0.$

20.31. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{196}=1,\ \ z=7,\ \ z=0.$

Задача 21. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–16 ось вращения Ox, в вариантах 17–31 ось вращения Oy.

21.1. $y=-x^2+5x-6,\quad y=0.$

21.2. $2x-x^2-y=0,\ \ 2x^2-4x+y=0.$

21.3. $y=3\sin x,\quad y=\sin x,\quad 0\le x\le\pi.$

21.4. $y=5\cos x,\ \ y=\cos x,\ \ x=0,\ \ x\ge 0.$

21.5. $y=\sin^2 x,\ \ x=\pi/2,\ \ y=0.$

21.6. $x=\sqrt[3]{y-2},\ \ x=1,\ \ y=1.$

21.7. $y=x\mathrm{e}^x,\ \ y=0,\ \ x=1.$

21.8. $y=2x-x^2,\ \ y=-x+2,\ \ x=0.$

21.9. $y=2x-x^2,\ \ y=-x+2.$

21.10. $y=\mathrm{e}^{1-x},\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=1.$

21.11. $y=x^2,\ \ y^2-x=0.$

21.12. $x^2+(y-2)^2=1.$

21.13. $y=1-x^2,\ \ x=0,\ \ x=\sqrt{y-1},\ \ x=1.$

21.14. $y=x^2,\ \ y=1,\ \ x=2.$

21.15. $y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}.$

21.16. $y=\sin(\pi x/2),\ \ y=x^2.$

21.17. $y=\arccos(x/3),\ \ y=\arccos x,\ \ y=0.$

21.18. $y=\arcsin(x/5),\ \ y=\arcsin x,\ \ y=\pi/2.$

21.19. $y=x^2,\ \ x=2,\ \ y=0.$

21.20. $y=x^2+1,\ \ y=x,\ \ x=0,\ \ y=0.$

21.21. $y=\sqrt{x-1},\ \ y=0,\ \ y=1,\ \ x=0{,}5.$

21.22. $y=\ln x,\ \ x=2,\ \ y=0.$

21.23. $y=(x-1)^2,\ \ y=1.$

21.24. $y^2=x-2,\ \ y=0,\ \ y=x^3,\ \ y=1.$

21.25. $y=x^3,\ \ y=x^2.$

21.26. $y=\arccos(x/5),\ \ y=\arccos(x/3),\ \ y=0.$

21.27. $y=\arcsin x,\ \ y=\arccos x,\ \ y=0.$

21.28. $y=x^2-2x+1,\ \ x=2,\ \ y=0.$

21.29. $y=x^3,\ \ y=x.$

21.30. $y=\arccos x,\ \ y=\arcsin x,\ \ x=0.$

21.31. $y=(x-1)^2$, $x=0$, $x=2$, $y=0$.

Задача 22

Варианты 1–10

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (рис. 2). Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения g положить равным 10 м/с^2.

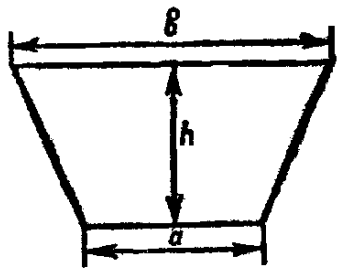

Рис. 2

У к а з а н и е. Давление на глубине x равно $\rho g x$.

22.1. $a=4{,}5$ м, $b=6{,}6$ м, $h=3{,}0$ м.

22.2. $a=4{,}8$ м, $b=7{,}2$ м, $h=3{,}0$ м.

22.3. $a=5{,}1$ м, $b=7{,}8$ м, $h=3{,}0$ м.

22.4. $a=5{,}4$ м, $b=8{,}4$ м, $h=3{,}0$ м.

22.5. $a=5{,}7$ м, $b=9{,}0$ м, $h=4{,}0$ м.

22.6. $a=6{,}0$ м, $b=9{,}6$ м, $h=4{,}0$ м.

22.7. $a=6{,}3$ м, $b=10{,}2$ м, $h=4{,}0$ м.

22.8. $a=6{,}6$ м, $b=10{,}8$ м, $h=4{,}0$ м.

22.9. $a=6{,}9$ м, $b=11{,}4$ м, $h=5{,}0$ м.

22.10. $a=7{,}2$ м, $b=12{,}0$ м, $h=5{,}0$ м.

Варианты 11–20

Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_з=6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли положить равным 10 м/с^2.

22.11. $m=7{,}0$ т, $H=200$ км.

22.12. $m=7{,}0$ т, $H=250$ км.

22.13. $m=6{,}0$ т, $H=300$ км.

22.14. $m=6{,}0$ т, $H=350$ км.

22.15. $m=5{,}0$ т, $H=400$ км.

22.16. $m=5{,}0$ т, $H=450$ км.

22.17. $m=4{,}0$ т, $H=500$ км.

22.18. $m=4{,}0$ т, $H=550$ км.

22.19. $m = 3{,}0$ т, $H = 600$ км. 22.20. $m = 3{,}0$ т, $H = 650$ км.

Варианты 21–31

Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением (103,3 кПа). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h м (рис. 3).

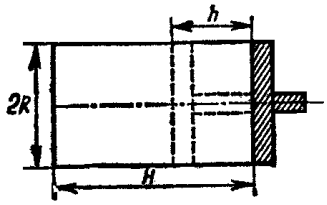

Рис. 3

У к а з а н и е. Уравнение состояния газа $pV = \text{const}$, где p – давление, V – объем.

22.21. $H = 0{,}4$ м, $h = 0{,}35$ м, $R = 0{,}1$ м. 22.22. $H = 0{,}4$ м, $h = 0{,}3$ м, $R = 0{,}1$ м.

22.23. $H = 0{,}4$ м, $h = 0{,}2$ м, $R = 0{,}1$ м. 22.24. $H = 0{,}8$ м, $h = 0{,}7$ м, $R = 0{,}2$ м.

22.25. $H = 0{,}8$ м, $h = 0{,}6$ м, $R = 0{,}2$ м. 22.26. $H = 0{,}8$ м, $h = 0{,}4$ м, $R = 0{,}2$ м.

22.27. $H = 1{,}6$ м, $h = 1{,}4$ м, $R = 0{,}3$ м. 22.28. $H = 1{,}6$ м, $h = 1{,}2$ м, $R = 0{,}3$ м.

22.29. $H = 1{,}6$ м, $h = 0{,}8$ м, $R = 0{,}3$ м. 22.30. $H = 2{,}0$ м, $h = 1{,}5$ м, $R = 0{,}4$ м.

22.31. $H = 2{,}0$ м, $h = 1{,}0$ м, $R = 0{,}4$ м.